## 基础课29 平面向量的数量积及其应用

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 平面向量的数量积及其应用 | 掌握 | 2023年新高考Ⅰ卷  2023年新高考Ⅱ卷  2023年全国甲卷（理）  2023年全国甲卷（文）  2023年全国乙卷（理）  2023年全国乙卷（文）  2023年北京卷  2023年天津卷 | ★★★ | 数学运算  直观想象 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，平面向量的数量积及其应用是高考常考内容，试题难度中等，常与立体几何、解析几何题进行综合命题.预计2025年高考命题情况变化不大 | | | |

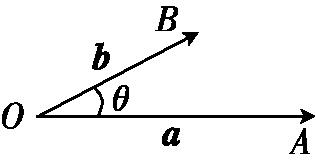
### 基础知识·诊断

#### 夯实基础

##### 平面向量数量积的有关概念

1*.*向量的数量积

(1)定义

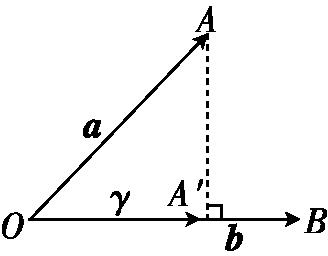
1. 

已知两个非零向量***a***和***b***,作*=****a***,*=****b*** (如图),向量***a***与***b***的夹角∠*AOB*记为*<****a***, ***b****>*或*θ*(0°≤*θ*≤180°)*.*①*|****a****||****b****|*cos *θ*称为***a***与*b*的数量积(或内积),记作***a***·***b***,即***a***·***b****=*②*|****a****||****b****|*cos*<****a***,*b>　=|****a****||****b****|*cos *θ.*

(2)规定:零向量与任一向量的数量积为③0*.*

2*.*投影及数量积的几何意义

(1)

1. 

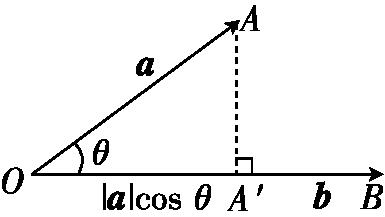
投影向量

已知两个非零向量***a***和***b***,作*=****a***,*=****b***,过点*A*向直线*OB*作垂线,垂足为*A'*(如图),得到***a***在***b***上的投影*γ=*④,*γ*称为投影向量*.*

(2)投影数量

⑤*|****a****|*cos*<****a***, ***b****>*为投影向量*γ*的数量,也称为向量***a***在向量***b***方向上的投影数量,可以表示为⑥***a****.*

(3)



如图,向量的数量积***a***·***b***的几何意义: ***b***的长度*|****b****|*与***a***在***b***方向上的投影数量*|****a****|*cos*<****a***,*b>*的乘积;或***a***的长度*|****a****|*与***b***在***a***方向上的投影数量*|****b****|*cos*<****a***, ***b****>*的乘积*.*

二、平面向量数量积的性质及其坐标表示

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 已知非零向量,，和的夹角为，是与方向相同的单位向量 | | |
|  | 几何表示 | 坐标表示 |
| 模 |  |  |
| 夹角 |  |  |
| 的充要条件 | ⑪ | ⑫ |
| 与的关系 | ⑬（当且仅当⑭时等号成立） | ⑮ |
| 与的关系 | ⑯ |  |

##### 三、平面向量数量积的运算律

|  |  |
| --- | --- |
| 交换律 | ⑰ |
| 结合律 |  |
| 分配律 |  |

#### 诊断自测

##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”，错的打“×”）

（1） 若 <0,则与的夹角为钝角.( × )

（2） 两个向量的数量积是一个实数，向量的加、减、数乘运算的结果是向量.( √ )

（3） 两个向量的夹角的取值范围是.( × )

（4） .( × )

2. （易错题）已知，，且与的夹角 为锐角，则实数 的取值范围是( A ).

A. B.

C. D.

**【易错点】**忽视向量共线的特殊情况.

[解析]因为与的夹角 为锐角，所以且，即且与不共线，即，且，即解得，故选.

##### 题组2 走进教材

3. （人教A版必修②P34·例11改编）已知，，设，的夹角为 ，则.

[解析]依题意.

4. （人教A版必修②P21·例13改编）已知，，且与不共线.若，则实数.

[解析]由题意知，解得.

##### 题组3 走向高考

5. [2023·新高考Ⅰ卷]已知向量,，若，则( D ).

A. B. C. D.

[解析]因为,，所以，，由，可得，即，整理得.故选.

### 考点聚焦·突破

#### 考点一 平面向量数量积的运算［自主练透］

1. [2023·全国乙卷]已知正方形的边长是2，是的中点，则( B ).

A. B. 3 C. D. 5

[解析]由题意可得,，

在中，由余弦定理可得，

所以.故选.

2. [2022·全国乙卷]已知向量,满足,,，则( C ).

A. B. C. 1 D. 2

[解析]，且,,,

，.故选.

3. [2023·全国甲卷改编]已知向量,，则在方向上的投影向量为.

[解析]由题意可知，，

设方向上的单位向量为，则，

所以在方向上的投影向量为.



**计算平面向量数量积的三种方法**

1.定义法：.

2.坐标法：若,，则.

3.几何意义法：数量积等于的模与在方向上的投影数量 的乘积.

#### 考点二 平面向量数量积的应用［多维探究］

##### 平面向量的模角度1

典例1（1） [2023·北京卷]已知向量，满足,，则( B ).

A. B. C. 0 D. 1

[解析]因为,，所以,，

故,，则.故选.

（2） [2023·新高考 Ⅱ 卷]已知向量，满足，，则.

[解析]因为，所以，即，整理得，

又因为，即，

所以，所以.



**求平面向量的模的两种方法**

|  |  |
| --- | --- |
| 公式法 | 利用及，把向量的模的运算转化为数量积运算 |
| 几何法 | 利用向量的几何意义，即利用向量线性运算的平行四边形法则或三角形法则作出所求向量，再利用余弦定理等方法求解 |

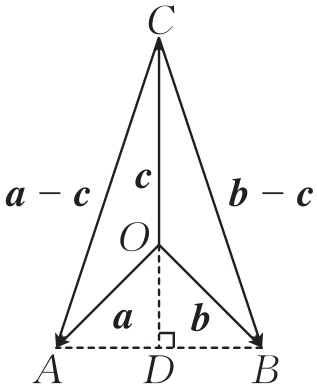
##### 平面向量的夹角角度2

典例2（1） [2023·全国甲卷]已知向量,,满足,，且，则( D ).

A. B. C. D.

[解析]因为,所以,

即,即,所以.



如图,设,,,

由题知,,,是等腰直角三角形,边上的高,,所以,

在中，,所以,

所以.故选.

（2） [2023·全国甲卷]已知向量,，则( B ).

A. B. C. D.

[解析]由题意知,，

则,，，

所以.

故选.



**求平面向量的夹角的两种方法**

|  |  |
| --- | --- |
| 定义法 | 利用，求解时应求出，,的值或找出这三个量之间的关系 |
| 坐标法 | 若,，则，  ,，  所以 |

##### 平面向量的垂直角度3

典例3（1） 已知单位向量，的夹角为 ，则在下列向量中，与垂直的是( D ).

A. B. C. D.

[解析]由已知可得.对于，因为，所以不符合题意；对于，因为，所以不符合题意；对于，因为，所以不符合题意；对于，因为，所以符合题意.故选.

（2） [2022·全国甲卷]已知向量,.若，则.

[解析]由题意知，解得.



**两个向量垂直的充要条件**

（其中,）.

【注意】以上是对非零向量而言的，若，则，但不能说.

##### 多维训练

1. （一题练透）（多选题）已知向量，，，则( ABD ).

A. B. 向量，的夹角为

C. D. 在方向上的投影向量是

[解析]因为，，

所以，

又，所以，解得，

所以，正确；

由向量的夹角公式可得，

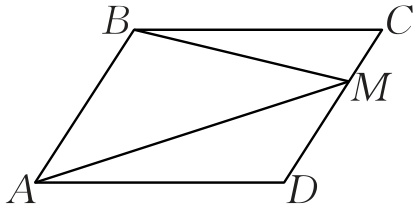
因为，所以，正确；

由上可得，所以，错误；

在方向上的投影向量为，正确.故选.

2. 在平行四边形中，，，若，，则与夹角的余弦值是.

[解析]如图，在平行四边形中，，，，则，，



设与的夹角为 ，

由，得，

，解得,

与夹角的余弦值是.

### 拓展教材 深度学习

**用向量法研究三角形的四心**

1.在中，以点为四心的向量表示（数量积形式）

重心：.

内心：.

垂心：,.

外心：,

.

2.点在的四线上的向量表示为所在平面内一点

中线：.

角平分线：.

垂线：.

中垂线：.

3.奔驰定理——解决面积比例问题

（1）奔驰定理：若为所在平面内一点，,,的面积分别为,,，则.

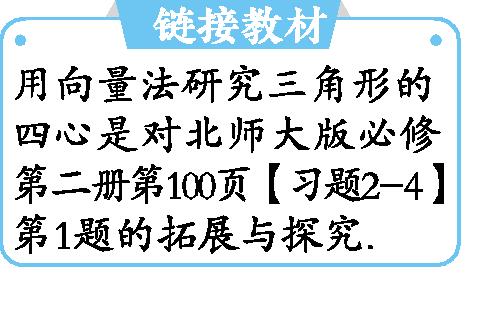
（2）奔驰定理与四心推论

是的重心：.

是的内心：.

是的外心：.

是的垂心：.



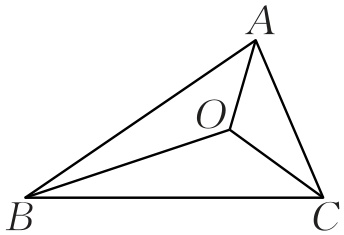
典例1 （点在垂线上的向量表示证明）在中，为所在平面内一点，若动点满足，，求证：动点的轨迹一定经过的垂心.

[解析]由条件可得，,

因为,

所以，所以动点的轨迹一定经过的垂心.

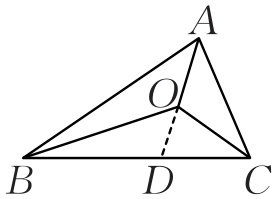
典例2 （奔驰定理证明）若为内一点，,,的面积分别为,,，求证：.



[解析]如图，延长与交于点，则，所以，因为,所以,

则,

即.



深度训练1 （1）（点在中线上的向量表示证明）在中，为所在平面内一点，若动点满足，，则动点的轨迹一定经过的重心.

（2）（点在中垂线上的向量表示证明）若为所在平面内一点，动点满足，，则动点的轨迹一定经过的外心.

[解析]（1）由条件可得,

由正弦定理得，即，

故，所以与边上的中线共线，所以动点的轨迹一定经过的重心.

（2）由条件可得，，

即，

所以，

即，得，故，

所以动点的轨迹一定经过的外心.

深度训练2 （奔驰定理与四心推论③证明）若是的外心，求证：.

[解析]已知是的外心，

若为锐角三角形，则,,.

若为钝角三角形，不妨设为钝角，

则,,.

若为直角三角形，不妨设为直角，

则 ,,.

无论何种情况，都有,,，

则，由奔驰定理得（反之也成立）.